Kosina-rješenje

1. Kad tijelo ide niz kosinu sila pralelno s kosinom (niz kosinu) iznosi $F_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Kad idu uz kosinu (nakon sudara) sila koja djeluje je sada veća jer sila trenja djeluje niz kosinu pa je $F_2 = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Dok se približavaju svako tijelo imaju akceleraciju $a_1 = \frac{F_1}{m}$, a dok se udaljavaju $a_2 = \frac{F_2}{m}$. Kada se sudare, svako tijelo će imati brzinu $v = \sqrt{2a_1 \frac{h_0}{\sin\alpha}}$. Prilikom sudara iznosi brzina će ostati isti, a smjer će im se okrenuti, prijeći će svako $\frac{v^2}{2a_2}$, tj. popet će se na visinu $h_1 = \frac{v^2}{2a_2}\sin\alpha = \frac{a_1}{a_2}h_0 = \frac{F_1}{F_2}h_0$. Ta je visina manja od h_0 ($F_1 < F_2$). Mehanička energija se pretvara u toplinsku zbog sile trenja te se zato tijelo ne može više popeti na početnu visinu nego samo na neku nižu.
2. Promatrajmo njihovu udaljenost nakon drugog sudara. Sada nemoramo ponovno sve računati, već možemo uzeti u obzir da je h_1 njihova početna udaljenost pa je $h_2 = \frac{F_1}{F_2}h_1$ tj. $h_2 = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 h_0$. Tako će općenito biti: $h_n = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^n h_0$.
3. Vrijeme t_1 sastoji se od 2 dijela: prije i poslije sudara. Tako je $t_1 = \sqrt{2\frac{h_0}{\frac{\sin\alpha}{a_1}}} + \sqrt{2\frac{h_1}{\frac{\sin\alpha}{a_2}}}$. Uvrstimo li izraz za h_1 i akceleracije te malo sredimo, dobivamo: $t_1 = \sqrt{\frac{2h_0 m}{\sin\alpha}}\frac{F_1 + F_2}{F_2\sqrt{F_1}}$.
4. Postupak je isti kao i pod 2. Dobiva se $t_n = \sqrt{\left(\frac{F_1}{F_2}\right)}^{n-1} t_1$.
5. Ako broj sudara raste neograničeno, promatrajmo sumu vremena $T = t_1 + t_2 + ... + t_n = t_1\left(1 + \sqrt{\left(\frac{F_1}{F_2}\right)}^2 ... + \sqrt{\left(\frac{F_1}{F_2}\right)}^{n-1}\right)$. Primjetimo da ovdje možemo primjeniti formulu $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ pa je $T = t_1 \frac{1 - \left(\sqrt{\frac{F_1}{F_2}}\right)^n}{1 - \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}}$. Kad

broj sudara bude jako velik, iznos $\left(\sqrt{\frac{F_1}{F_2}}\right)^n$ će biti jako malen, jer je $\frac{F_1}{F_2} < 1$ tako da će brojnik biti približno jednak 1. Vidimo da suma ne prelazi određenu vrijednost za bilo koji broj sudara, dakle nakon vremena $T = t_1 \frac{1}{1-\sqrt{\frac{F_1}{F_2}}}$ više neće biti sudara.

R/2 Rješenje (Damjan Pelc)

U rješenja koja ne spominju relativističke korekcije boduju se po shemi. Ako se netko sjeti i eventualno napravi procjenu korekcija, dobiva dodatne bodove koji su naznačeni u zagradama.

a) Da bi polje bilo homogeno moraju diskovi biti veliki i blizu; to vodi na uvjet

$$R >> D$$

b) Gravitaciju ćemo zanemariti; u tom slučaju na elektron djeluje samo sila od električnog polja, koja je dana s eE , gdje je e naboj elektrona a E iznos polja. Između ploča koje su na potencijalima $+U$ i $-U$ polje iznosi

$$E = \frac{2U}{D}$$

a jednadžbu gibanja pišemo u obliku

$$ma = 2e\frac{U}{D}$$

gdje je m masa i a akceleracija elektrona. Kako je sila konstantna, elektron jednoliko ubrzava i brzina mu je

$$v = v_0 + 2\frac{e}{m}\frac{U}{D}t$$

a pomak

$$x = v_0 t + \frac{e}{m}\frac{U}{D}t^2$$

Za početni položaj smo uzeli $x = 0$.

c) Treba primijetiti da se za navedenu konfiguraciju rada uređaja elektron zapravo stalno nalazi u istom polju; kako elektron prolazi ploče njihovi potencijali se okreću i polje je uvijek isto. To znači da jednadžba gibanja ostaje

$$ma = 2e\frac{U}{D}$$

a za zadanu početnu brzinu imamo i rješenje

$$v = v_0 + 2\frac{e}{m}\frac{U}{D}\tau$$

S τ smo označili vrijeme potrebno elektronu da prođe svih N ploča. Konačnu brzinu imamo ako nađemo to vrijeme; lako ga je naći ako se sjetimo da ukupni put elektrona mora biti razmak ploča množen brojem ploča, ili ND. Dobivamo jednadžbu za τ:

$$v_0\tau + \frac{e}{m}\frac{U}{D}\tau^2 = ND$$

Slijedi

$$\tau = \frac{v_0}{2}\frac{m}{e}\frac{D}{U}\left(\sqrt{1+\frac{4N}{v_0^2}\frac{e}{m}U} - 1\right)$$

i uvrštavanjem

$$\frac{v_N}{v_0} = \sqrt{1+\frac{4N}{v_0^2}\frac{e}{m}U}$$

Aproksimacija je opravdana daleko od krajnjih ploča, zbog činjenice da će se polja ostalih ploča približno poništavati (naravno, postojat će doprinosi višeg reda, ali oni su mali). Blizu rubova simetrije neće biti i može doći do nešto većih grešaka.

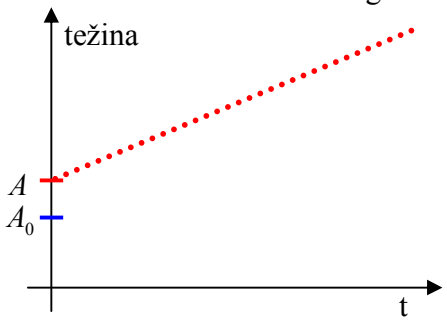
e)

Kiša – rješenje

Brzina kapljice je konstantna jer sila otpora zraka raste sa brzinom kapljice, naime, kapljica ubrzava, a time raste i sila otpora zraka sve dok se ne izjednači sa silom kojom ju Zemlja privlači.

Predložit ćemo dva načina mjerenja brzine.
Slabiju kišu možemo naprosto snimati kamerom te kasnije gledati snimku. Naime, kamera snima zapravo velik broj slika. Ako u kišu vertikalno stavimo metar, možemo na snimci izmjeriti koliko je kapljica prešla u vremenskom intervalu između dvije slike, a taj vremenski interval je karakteristika kamere koja se može naći u dokumentaciji kamere. Ako puše vjetar korisno je postaviti još jedna metar vodoravno tako da jednostavno možemo izmjeriti na slikama koordinate bilo koje točke. Također treba paziti na to da se snima sa nešto veće udaljenosti, da bi očitanja sa metra bila što točnija. (Zašto?) Bilo bi dobro i natkriti prostor te ostaviti rupu samo oko metra koji snimamo da bi snimali kapljice koje padaju blizu metra.

Brzinu kapljica u jačoj kiši možemo mjeriti na sljedeći način. Stavimo veliku spužvu na vagu (zapravo dinamometar) i očitamo njenu težinu A_0. Zatim vagu sa spužvom stavimo na kišu i zapisujemo što pokazuje dinamometar u vremenu. Ukoliko je tok kiše konstantan u vremenu težina spužve rast će linearno u vremenu. Ako nacrtamo graf ovisnosti težine o vremenu prema izmjerenim točkama dobit ćemo nešto slično onome na slici. Vidjet ćemo da pravac koji dobijemo ne siječe y-os u A_0, već u A . U čemu je razlika? Razlika je u tome što se težina istina povečava linearno te bi u $t = 0$ trebala biti A_0 međutim vaga će mjeriti i promjenu količine gibanja (impulsa) kapljica kiše, a upravo je u tome razlika između A_0 i A. Ako znamo



koliko se ukupno u vremenu T povećala težina, znamo masu koja je pala na spužvu u jedinici vremena. Spužvu koristimo kako bi se kapi upijali te da se ne odbijaju i tako stvaraju dodatnu promjenu impulsa. Znamo da je promjena impulsa jednaka: $\Delta p = mv$, u našem slučaju $mv = \frac{A - A_0}{T}$ tj. $v = \frac{A - A_0}{mT}$. m je masa koju spužva upije u vremenu T, a v brzina kapljica kiše.
Ova metoda radi za jednoliko padanje kiše, približno jednakih brzina kapi kiše (to je ostvareni za jednako velike kapljice). Bitno je osigurati da voda ne curi iz spužve te da ništa ne pada direktno na vagu. Da bi mogli izmjeriti razliku $A - A_0$ treba imati dovoljno osjetljivu vagu (ili dovoljno jaku kišu).
Naravno, ovako mjerimo samo vertikalnu komponentu brzine. Da bi izmjerili horizontalnu komponentu trebao zarotirati cijeli instrument za 90 stupnjeva i ponoviti mjerenje. Tako dobivamo horizontanu komponentu brzine i pomoću pitagorinog poučka možemo izračunati ukupnu brzinu.

Salinitet

1.) Mogu se još iskoristiti sniženje ledišta odnosno povišenje vrelišta (što je relativno točna ali prilično mukotrpna metoda), može se mjeriti gustoća u odnosu na čistu vodu (to je brza ali relativno neprecizna metoda, i potrebne su veće količine uzorka zbog glomaznosti plovaka za mjerenje gustoće), može se voda ispariti ili sol iskristalizirati (to je dobra metoda ako ne moramo sačuvati uzorak)...

2.) Sol se sastoji od pozitivnih i negativnih iona, koji slobodno plivaju po otopini. Ako im se nametne električno polje, ono će na njih djelovati nekom silom uzrokujući njihovo gibanje, to jest struju.

3.) Tipičan uređaj bi se sastojao od dvije pločaste elektrode spojene u seriju sa standardnim otpornikom i izvorom napona. Na standardnom otporniku se mjeri napon, koji je proporcionalan struji kroz krug, dakle i otporu tekućine. Alternativno, može se struja mjeriti direktno ampermetrom. Dvije su glavne modifikacije:

Izmjeničan napon. To je vrlo dobra varijanta jer se sprječava elektroliza na elektrodama pa nema raznih efekata povezanih s njom, kao što su mjehurići. lokalne promjene koncentracije soli i slično. Ti efekti mogu potpuno upropastiti mjerenje pa je preporučljivo raditi upravo s izmjeničnom strujom. Međutim, i ovdje postoje neke teškoće; cilj nam je mjeriti samo omski otpor tekućine između elektroda, no zbog velike dielektrične konstante vode može do izražaja doći i kapacitivni otpor elektroda. To treba odračunati. Također nije poželjno koristiti prevelike napone zbog nelinearnih efekata i gubitaka na standardnom otporniku (Jouleova toplina i sl.). Isto tako, kod izmjenične struje veliki problem može stvarati radiofrekventna buka i sveprisutan šum na 50 Hz; to je glavni izvor problema u ovakvom mjerenju, i nužno je upotrebljavati filtre za mjereni signal, ili još bolje fazno osjetljive detektore.

Istosmjeran napon. S istosmjernom strujom valja u ovom slučaju biti vrlo oprezan. Na strujama većim od nekoliko mA javlja se značajna elektroliza na elektrodama i dolazi do brojnih smetnji, koje smo već spomenuli: pojava mjehurića, promjena koncentracije soli u blizini elektroda etc. Ti efekti jako otežavaju stabilno mjerenje otpora tekućine. Zato je nužno koristiti vrlo male struje, ili još bolje metodu četiri kontakta. Ona funkcionira tako da se između elektroda koje daju napon stave dvije mjerne elektrode i s njih skida napon (koji ovisi o struji kroz tekućinu). Na tim elektrodama neće biti neželjenih efekata jer njima ne teče struja. Naravno, i u radu s istosmjernom strujom buka može dosta smetati, a i izvori znaju biti nestabilni. Zato je poželjno koristiti low - pass filtere ili sl.

U obje modifikacije uređaj je nužno baždariti, s obzirom da ovisnost vodljivosti o koncentraciji nije jednostavna.

Ravnotežne točke - rješenje

1.)

a) masa Zemlje je njen volumen množen gustoćom. Volumen je lako procijeniti, međutim gustoća je problem. Budući da znamo da se Zemlja sastoji od stijena i metala, možemo zaključiti da je gustoća relativno velika u odnosu na vodu, reda veličine 10000 kg/m3 (točnija vrijednost je 5500 kg/m3). Dijametar je reda veličine 10000 km, što za masu daje 10^24 kg. (Točnija vrijednost je 6.0*10^24). Omjer je reda veličine 10^-21.

b) to znači da je utjecaj satelitovog gravitacijskog polja na Zemlju zanemariv.

c) U sustavu satelita bi se moglo promatrati kao da djeluju gravitacija i centrifugalna sila, međutim tako se može doći do proturječja zbog posebne prirode gravitacije, odnosno jednakosti trome i teške mase (satelit slobodno pada, i zbog jednakosti trome i teške mase on je inercijalan sustav! Sjetite se samo da u svemirskim letjelicama 'nema gravitacije'). Zato je bolje sustav promatrati izvana, iz inercijalnog sustava vezanog za centar mase Zemlje; u takvom sustavu je jedina sila koja djeluje na satelit naravno gravitacija, koja igra ulogu centripetalne sile.

d) ravnotežna kružna putanja je ona za koju je gravitacijska sila upravo centripetalna. To daje

$$m\omega^2 r = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}$$

Sila ne ovisi o masi satelita zbog činjenice da je inercijska masa upravo jednaka gravitacijskoj masi. Ta fundamentalna činjenica ima posljedicu da samo za gravitacijske interakcije ravnotežni radius ne ovisi o masi kružećeg objekta, te stvara već spomenute probleme oko izbora sustava referencije.

e) Ako satelit miruje u odnosu na površinu Zemlje znači da mu je kutna brzina jednaka kutnoj brzini rotacije Zemlje, odnosno period mu je 24 h. Iz toga slijedi

$$r_{gs} \sim 10^4 \text{ km}$$

Točnija vrijednost je 17500 km.

2.)

a) Središte mase je na pola puta između dva tijela. Udaljenost dobivamo postavljajući gravitacijsku silu za centripetalnu:

$$D^3 = \frac{2GM}{\omega^2}$$

b) Na satelit (u inercijalnom sustavu vezanom npr. za centar masa velikih tijela) djeluju gravitacijske privlačnosti dvaju tijela, čiji vektorski zbroj mora biti upravo (radijalna!) centripetalna sila. Tri libracijske točke leže na pravcu koji spaja dva tijela, a druge dvije na pravcu koji je okomit na spojnicu tijela i prolazi centrom mase, simetrično s obzirom na centar. Ravnotežne točke mogu se nalaziti samo tamo gdje vektorski zbroj dvaju gravitacijskih sila ima jedino radijalnu komponentu; samo tamo može gravitacija biti centripetalna sila. To je moguće u navedenih pet položaja, što se lako vidi iz dijagrama sila.

c) Tri točke koje leže na pravcu spojnice tijela lako je naći; jedna je zasigurno samo središte mase. Preostale dvije nalazimo iz uvjeta:

$$m\omega^2 r = GMm\left[\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{1}{(R-r)^2}\right]$$

Sređivanjem se za omjer $\tilde{r} = \frac{r}{R}$ dobiva jednadžba petog stupnja:

$$\tilde{r}^5 - 2\tilde{r}^3 - 8\tilde{r}^2 + \tilde{r} - 8 = 0$$

Rješavati ju nije nužno, iako se jedino realno rješenje lako iščitava iz grafa funkcije, ili pogađanjem:

$$\tilde{r} \approx 2.4$$

Za dvije točke koje ne leže na spojnici opet postavljamo uvjet za silu gravitacije:

$$m\omega^2 r = \frac{2GMmr}{\left(R^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Tu jednadžbu je lako riješiti; možemo opet promatrati omjer $\tilde{r} = \frac{r}{R}$:

$$\tilde{r} = \sqrt{3}$$

d) Ako se satelit malo udalji od stabilne ravnotežne točke, nastale sile će ga vraćati u tu točku. Ako je točka nestabilna, satelit će se sve više udaljavati od nje ako se malo odmakne.

e) Stabilne točke jedino mogu biti one dvije koje ne leže na pravcu - spojnici tijela; za tri točke na spojnici vidimo da su nestabilne, jer čim se satelit malo udalji od neke od njih privlačenje jednog (ili oba) tijela će prevladati i satelit će početi padati. Detaljnijom matematičkom analizom se ispostavlja da su dvije točke sa strane zaista stabilne.

f) Za različite mase točke koje leže na spojnici i dalje će tamo ležati, samo će se mijenjati njihove udaljenosti od tijela. Dvije točke koje ne leže na spojnici će se približavati manjoj masi, što se može zaključiti iz dijagrama sila. U limesu kad je jedna masa mnogo veća (pa možemo uzeti da miruje) dvije točke sa strane će se poklapati sa središtem manje mase, jedna ravnotežna točka će biti s vanjske strane male mase, i vrlo blizu nje, druga će biti s unutarnje strane, a treća daleko na suprotnoj strani velike mase.

3.)

a) Udaljenosti se dobivaju iz činjenice da je gravitacija centripetalna sila za dano tijelo, isto kao i u prijašnjim zadacima:

$$D^3 = \frac{3}{2}\frac{GM}{\omega^2}$$

b) Nalazi se sedam ravnotežnih točaka, jedna u središtu rotacije, ostalih šest 'izvana', tamo gdje vektorski zbroj gravitacija ima samo radijalnu komponentu.

c) Za *N* tijela možemo zaključiti da će biti $2N + 1$ ravnotežnih točaka; to naravno ne vrijedi za *N* = 1. Što je broj *N* veći udaljenosti ravnotežnih točaka od centra rotacije bit će veće. Ako pustimo da *N* teži u beskonačnost (uz konačne pojedinačne mase) ravnotežne točke će morati biti beskonačno daleko od centra rotacije.

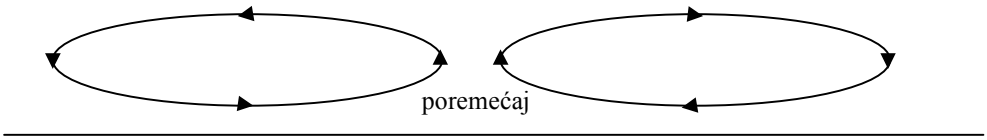
Zašto nam je hladno-rješenje

1. Postoji više načina na koje tijelo gubi energiju. Jedan od njih je zračenje. Drugi način je vođenjem, naime, toplina preko kože prelazi na okolni zrak. Ukoliko je zrak oko tijela miran, zagrijat će se sloj zraka uz tijelo te će tijelo sporo gubiti toplinu jer je zrak dobar toplinski izolator. Međutim, ako puše vjetar, neće biti toplijeg sloja zraka oko tijela jer će ga vjetar odnijeti i na njegovo mjesto donijeti novi hladniji. Na tom principu radi npr. lepeza, hladi osobu koja ju koristi, ali zato grije prostoriju.
2. Astronaut, naravno, ima zaštitno odijelo iz više razloga, međutim, nas trenutno zanima gubitak toplnske energije. Dakle, astronaut ne bi izgubio ništa energije vođenjem jer je vakuum izolator, ali gubi jako puno energije zračenjem, a ne prima ništa energije istim putem. Naime, na Zemlji čovjekova okolina je na temperaturama od približno 280-300 K te čovjek dobiva tolpinsku energiju zračenjem. Svemir je na mnogo nižoj temperaturi te bi se čovjek brzo smrzuo da nema zaštitnog odijela.
   Osim što bi se smrznuo, čovjek bi umro i zbog naglog pada tlaka te zbog toga što bi se jako brzo sušio (u atmosferi postoji određena količina vlage)
3. Životinjama su guste dlake i krzno bitni jer drže sloj zraka koji miruje oko njih te im služi kao tolpinski izolator.

Ciklona

1.)

a) Ako je tlak veći od okolnog, zrak će teći iz tog područja dok se tlakovi ne izjednače, a ako je tlak niži od okolnog zrak će pritjecati na to područje; često mogu nastati i povratna strujanja pa poremećaj ne nestaje.



b) Zgodna analogija je npr. odvod u kadi (odvod djeluje kao 'ponor' vode isto kao što područje nižeg tlaka djeluje kao ponor za zrak)

c) U slučaju *i*) je u području višeg tlaka neka količina vlage. Kako je na višem atmosferskom tlaku manji parcijalni tlak para vode, vlaga će ispariti i bit će lijepo vrijeme. Međutim, u slučaju *ii*) je tlak manji, pa je parcijalni tlak vodene pare veći. To može dovesti do kondenzacije i stvaranja oblaka. Još je važniji efekt kružnog strujanja (slika); njime se vlažni zrak diže u visoke slojeve atmosfere gdje je hladno, pa lakše dolazi do kondenzacije.

d) Razloga je mnogo: temperaturne fluktuacije, reljef (planine i kotline), pasatni vjetrovi, prijelaz kopno - more i tako dalje.

2.)

e) Sila uvijek djeluje okomito na smjer brzine, tako da os rotacije, vektor brzine i vektor sile tvore lijevi sustav. To se lako vidi iz jednostavnog pokusa (koji je izveden na druženju) ili jednostavno crtanjem putanje tijela (u rotirajućem sustavu) koje se u nerotirajućem sustavu giba po pravcu.

f) Putanja bi bila zakrivljena jer bi promatrač na disku vidio i da kuglica odmiče od njega zbog njegove rotacije.

g) Anticiklona: kruži u smjeru suprotnom od smjera kruženja Zemlje
Ciklona: kruži u smjeru kruženja Zemlje

h) Na južnoj polutci će također doći do kruženja, ali u suprotnim smjerovima nego na sjeveru.

Tramvaj-rješenje

Kako kotači ne prelaze jednake puteve, onaj vanjski će morati proklizavati, dakle zvuk nastaje slično kao i kod nepodmazanih vrata ili kad zaškripi kreda po ploči. Kako kod proklizavanja nastaje zvuk?
Odgovrimo prvo na pitanje iz zadatka. U nekim slučajevima će opisani sustav titrati. Što se događa? Kako se opruga rasteže, sila na tijelo se povećava, u trenutku kad prijeđe iznos $N\mu_{stat}$ (N je sila kojom podloga djeluje na tijelo, a μ_{stat} statički koeficijent trenja) tijelo će se pokrenuti. Međutim, tada sila trenja neće biti jednaka kao kad je tijelo mirovalo nego manja jer je koeficijent trenja klizanja manji od statičkog koeficijenta trenja tako da kada tijelo dođe u položaj u kojem je sila opruge jednaka sili trenja ima neku brzinu (taj ćemo položaj dalje zvati ravnotežni). Sada, sila koja djeluje na tijelo iznosi $F_U = -kx + \mu N$ što je jednadžba harmoničkog oscilatora sa pomaknutim ravnotežnim položajem, dakle, sustav će harmonički titrati.
Međutim kad tijelo ponovno dođe na brzinu kojom se giba podloga (dalje ćemo ju označavati sa v_0) više neće klizati te će se sve isponova dogoditi. Dakle tijelo će se jedan dio puta gibati kao da haronički titra, a ostatak će se vratiti jednolikom brzinom v_0.

Za one koji vole matematiku (NE traži se u vašim rješenjima!):

Možemo izračunati frekvenciju titranja:
Izračunajmo period koji prođe između dvije iste točke u ciklusu. Uzet ćemo za tu točku trenutak kada tijelo počne klizati. Tada se nalazi na položaju $\frac{(\mu_{stat} - \mu)N}{k}$ (uzmiamo da je položaj u kojem je zbroj sila nula ishodište). Ukupni period će biti
$T = T_0 - \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin(x_2) - \arcsin(x_2) \right) + \frac{x_2 - x_1}{v}$, kako znamo koordinate
$x_2 = A\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$ i $x_1 = -A\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$, naime točke su simetrične jer su to točke u kojima tijelo ima jednaku brzinu pa je
$T = T_0 - 2\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{(\mu_{stat} - \mu)N}{kA}\right) + 2\frac{(\mu_{stat} - \mu)N}{kv_0}$, gdje je $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ frekvencija harmoničkog oscilatora, a A amplituda titranja i može se izračunati iz očuvanja energije:
$\frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{(\mu_{stat} - \mu)N}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2$, tako dobivamo:

$$T = T_0\left(1 - \frac{\arcsin\left(\frac{(\mu_{stat}-\mu)N}{k\sqrt{\frac{mv_0^2}{k}+\left(\frac{(\mu_{stat}-\mu)N}{k}\right)^2}}\right)}{\pi}\right) + 2\frac{(\mu_{stat}-\mu)N}{kv_0}$$, međutim brzinu

v_0 možemo zapisati kao $v_0 = (\mu_{stat}-\mu)\sqrt{\frac{m}{k}}gC$ (ako je $\mu_{stat}-\mu > 0$), gdje je C bezdimenzionalna konstanta. Koristit ćemo dalje da je $N = mg$ Sređivanjem dobivamo:

$T = T_0\left(1 - \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{C^2+1}}\right)}{\pi} + \frac{\sqrt{\frac{1}{C}}}{\pi}\right)$. Kako je C pozitivan broj, izraz u zagradama je uvijek veći od 1, a za $C \to +\infty$ $T \to T_0$. Također, kako je C pozitivan vrijedi da je $\frac{1}{\sqrt{C^2+1}} < \sqrt{\frac{1}{C}}$, a kako je fuknkcija arcsin strogo rastuća injekcija na intervalu $\langle 0,1\rangle$, a izraz pod arcsin postiže samo te vrijednosti za bilo koji pozitivan C (usput je to provjera jer kad bi taj izraz bio veći od 1 nesto ne bi bilo dobro ☺) vrijedi da je $\arcsin\frac{1}{\sqrt{C^2+1}} < \arcsin\sqrt{\frac{1}{C}}$. Može se pokazati da je $\arcsin x < x, x \in \langle 0,1\rangle$ iz čega slijedi da je $-\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{C^2+1}}\right)}{\pi} + \frac{\sqrt{\frac{1}{C}}}{\pi} > 0$ tj. $T > T_0$

Dakle, frekvencija titranja će biti niža nego kod harmoničkog titranja, a za jako velike brzine biti će približno jednaka toj frekvenciji.

Kako tijelo koje titra zatitrava okolni zrak tako frekvencija titranja zraka ovisi o frekvenciji titranja tijela tako smo već opisali i kako će frekvencija nastalog zvuka ovisiti o brzini.

Također je zanimljivo primijetiti da ukoliko je $\mu_{stat} - \mu = 0$ tada je titranje čisto harmoničko sa periodom T_0, dakle razlka između koeficijenata trenja smanjuje frekvenciju titranja.

Sve korištene veličine se mogu povezati sa veličinama koje se pojavljuju kod cvilenja tramvaja. Naime masa je upravo masa tramvaj, problematična bi mogla biti masa koja titra, no i ona će vjerovatno biti veća što je pritisak veći jer samo dodirni slojevi titraju,

elastičnost je svojstvo o kojem je bilo riječi u zadatku, koeficijenti trenja znače isto, samo je pitanje koje je značenje brzine v_0. To je brzine proklizavanja, dakle koliko veći put prijeđe vanjski kotač od unutarnjeg u jedinici vremena, tako je brzina tramvaja linearno povezana sa korištenom veličinom v_0 te vrijede isti zaključci.